Université Paris-Diderot | Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II | L1 MASS

Test

Considerons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Considerons aussi les applications $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ données par

$$f(x,y,z) = (2x+y+3z, -x+y+z, x+5y+9z), \qquad g(x,y,z) = (2x-y+z, x+y+5z, 3x+y+9z).$$

En sachant que pour les systèmes suivants on a

$$(S_1) : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$(S_2) : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 5 & b \\ 3 & 1 & 9 & c \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & b \\ 0 & 2 & 6 & 3b-c \\ 0 & 0 & 0 & 2a+5b-3c \end{array}\right),$$

$$(S_3) : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$(S_4) : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 5 & 9 & c \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 3 & 5 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+3b-c \end{array}\right),$$

répondre, sans faire des calculs supplémentaires (sauf dans deux cas), aux questions suivantes. Indiquer quels systèmes on utilise chaque fois.

(a) Quelle est la matrice associée à f ? B vérifie $f(x,y,z) = B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. De façon analogue, les colonnes de B sont les coordonnées de $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ et $f(0,0,1)$.

(b) Quelle est la matrice associée à g ? A, voir (a).

(c) L'espace $\mathrm{Vect}(v_1)$, avec $v_1 = (-2,-3,1)$, est l'espace de solutions de quel système ? (S_1).

(d) L'espace $\mathrm{Vect}(v_2)$, avec $v_2 = (-2,-5,3)$, est l'espace de solutions de quel système ? (S_3).

(e) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
Pour $\operatorname{Ker} f$, il faut résoudre le système (S_3), et on obtient $\mathrm{Base}(\operatorname{Ker} f) = \{v_2\}$.
Pour $\operatorname{Im} f$, par le théorème du rang sa dimension est 2. $\operatorname{Im} f$ est engendré par les vecteurs colonne de B. Les premiers deux vecteurs sont linéairement indépendants (par exemple, par le système (S_3)), donc une base est $\mathrm{Base}(\operatorname{Im} f) = \{(2,-1,1),(1,1,5)\}$.

(f) Donner une base de $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.
Pour $\operatorname{Ker} g$, il faut résoudre le système (S_1), et on obtient $\mathrm{Base}(\operatorname{Ker} g) = \{v_1\}$.
Pour $\operatorname{Im} g$, par le théorème du rang sa dimension est 2. $\operatorname{Im} g$ est engendré par les vecteurs colonne de A. Les premiers deux vecteurs sont linéairement indépendants (par exemple, par le système (S_1)), donc une base est $\mathrm{Base}(\operatorname{Im} g) = \{(2,1,3),(-1,1,1)\}$.

(g) Donner un système d'équations caractérisant $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
Le noyau est défini par $\{v \in \mathbb{R}^3 \; f(v) = 0\}$, ce qui nous donne
$\operatorname{Ker} f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x+5y+9z=0 \end{cases} \right\}$. Comme la troisième condition est une combinaison linéaire des premières deux (par une question de dimension, ou bien en regardant le système (S_4)), on obtient $\operatorname{Ker} f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \right\}$.
Pour $\operatorname{Im} f$, il faut donner des conditions sous lesquelles le système (S_4) admet solution. On obtient $\operatorname{Im} f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+3y-z=0 \right\}$. De façon analogue, une équation $ax+by+cz=0$ est satisfaite par les colonnes de B si et seulement si (a,b,c) est solution du système (S_1), et on conclut par le point (c).

(h) Donner un système d'équations caractérisant $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.
On a $\operatorname{Ker} g = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+y+5z=0 \end{cases} \right\}$ et $\operatorname{Im} g = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+5y-3z=0 \right\}$.
Les motivations sont analogues auxquelles du point (g).

(i) Donner un système d'équations caractérisant l'espace $V_1 = \operatorname{Vect}\{(2,1,3),(-1,1,1),(1,5,9)\}$.
$V_1 = \operatorname{Im} g = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+5y-3z=0 \right\}$, par le point (h).

(j) Donner un système d'équations caractérisant l'espace $V_2 = \operatorname{Vect}\{(2,-1,1),(1,1,5),(3,1,9)\}$.
$V_2 = \operatorname{Im} f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+3y-z=0 \right\}$, par le point (g).

(k) Donner une base de V_1 et V_2. $V_1 = \operatorname{Im} g$, voir point (f). $V_2 = \operatorname{Im} f$, voir point (e).

(l) Donner une base de l'espace vectoriel $V_1 + V_2$.
Comme $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ et $V_1 \neq V_2$, on a $\dim(V_1+V_2) = 3$ et $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. Donc on peut prendre la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(m) Quel système $((S_1),(S_2),(S_3),(S_4)$ ou alcun des précédents) donne la réponse à la question suivante : Donner une base de $\operatorname{Vect}\{(2,1,3),(-1,1,1)\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y+9z=0\}$.
Aucun. En effet, pour calculer cette intersection, il faut exprimer $\operatorname{Vect}\{(2,1,3),(-1,1,1)\} = \operatorname{Im} g = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+5y-3z=0 \right\}$ par (i), puis résoudre le système $\begin{cases} 2x+5y-3z=0 \\ x+5y+9z=0 \end{cases}$.
On obtient après calculs l'espace $\operatorname{Vect}\{(60,-21,5)\}$.

(n) Calculer le rang de f. $\operatorname{rang}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$, vu par exemple au point (e).